Řešení příkladů – funkce definované implicitně

(1.) Máme danou rovnici

$$y^3 - 2y^2x - xy - 8 = 0 \qquad (*)$$

a) v okolí bodu $(x_0, y_0) = (0,2)$ je rovnicí $(*)$ implicitně definována funkce $y = y(x)$, neboť:

1) $F(x,y) = y^3 - 2y^2x - xy - 8$, $F(x,y) \in C^\infty(R^2)$
2) $F(0,2) = 8 - 8 = 0$
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 3y^2 - 4yx - x \big|_{(0,2)} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(0,2)$ je rovnicí $(*)$ definována implicitně (dle věty o impl. fci) funkce $y = y(x)$, $y(0) = 2$.

b) Rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $(*)$, v bodě $(0,2)$:

Obecně: Je-li $\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0)$, pak rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) této křivky je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

Tedy v tomto příkladu: $(x_0, y_0) = (0,2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,2) = -2y^2 - y \big|_{(0,2)} = -8 - 2 = -10$$

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 12$ (už máme), tedy rovnice tečny v bodě $(0,2)$ je: $-10(x-0) + 12(y-2) = 0$, tj. (po úpravě)

$$5x - 6y + 12 = 0$$

c) aproximace funkce $y(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ Taylorovým polynomem 2. stupně:

$$T_2(x) = y(0) + y'(0).x + \frac{y''(0)}{2}x^2 \quad v \quad U(0)$$

Výpočet derivací $y'(0)$ a $y''(0)$:

Funkce $y(x)$ splňuje rovnici (v okolí bodu $x_0=0$)

$$y^3(x) - 2y^2(x).x - xy(x) - 8 = 0 \qquad (**)$$

$y'(0)$: „$\frac{d}{dx}(**)$:" $3y^2(x).y'(x) - 4y(x).y'(x).x - 2y^2(x) - y(x) - xy'(x) = 0$ v $U(0)$

tj. $y'(x)(3y^2(x) - 4xy(x) - x) = 2y^2(x) + y(x) \qquad (***)$

v $x_0=0$: $y'(0).12 = 10 \Rightarrow \underline{y'(0) = \frac{5}{6}}$

$y''(0)$: derivujeme rovnici $(***)$ dle x:

$$y''(x)(3y^2(x) - 4xy(x) - x) + y'(x)(6y(x).y'(x) - 4y(x) - 4xy'(x) - 1) = $$
$$= 4y(x).y'(x) + y'(x)$$

v $x_0=0$: $y''(0).12 + \frac{5}{6}(\cancel{6}.2.\frac{5}{\cancel{6}} - 0 - 8 - 1) = 4.2.\frac{5}{6} + \frac{5}{6}$

tj. $y''(0).12 + \cancel{\frac{5}{6}} = \frac{20}{3} + \cancel{\frac{5}{6}}$

$\underline{y''(0) = \frac{5}{9}}$

Tedy: $\underline{T_2(x) = 2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{18}x^2 \quad v \quad U(0)}$

(tj. v okolí $U(0)$ je „přibližné řešení" rovnice $(*)$ dáno $T_2(x)$,

tj. $\underline{y(x) \cong 2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{18}x^2}$)

(2.) Je daná rovnice

$$z^4 - x^3 y z^2 - xz + y^3 = 0 \qquad (*)$$

a) máme ukázat, že rovnicí (*) je v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ implicitně definována funkce $z = z(x,y)$: ověříme předpoklady „věty o implicitní funkci“:

1) $F(x,y,z) = z^4 - x^3 y z^2 - xz + y^3 \in C^\infty(R^3)$
2) $F(1,1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$
3) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 4z^3 - 2x^3 y z - x \Big|_{(1,1,1)} = 1$

$\Rightarrow$ věta o impl. fci

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(1,1,1)$ je rovnicí (*) definována implicitně funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1) = 1$ a funkce $z(x,y)$ splňuje v okolí $U(1,1)$ rovnici (**) (viz v b))

b) Pomocí lineární aproximace máme určit přibližně hodnotu $z(1{,}01; 0{,}96)$:

$$z(1{,}01; 0{,}96) \cong \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 0{,}01 + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \cdot (-0{,}04) + z(1,1)$$

výpočet $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$: $\quad z^4(x,y) - x^3 y z^2(x,y) - x z(x,y) + y^3 = 0 \quad$ v $U(1,1)$ (**)

derivace (**) dle x: (nepíšu $z(x,y)$ – „jen“ z)

$$4z^3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 3x^2 y z^2 - x^3 y \cdot 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - z - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(4z^3 - 2x^3 y z - x\right) = 3x^2 y z^2 + z$$

a v $(1,1)$: $\quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 1 = 3 + 1$, tj.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$$

(také lze užít „vzorce“: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = -3x^2 y z^2 - z \right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{-4}{1} = 4 \;)$$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ – lze derivovat (**) podle y (nebo lze užít vzorec)

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -x^3z^2 + 3y^2 \quad , \text{ tj. } \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 2$$

a derivací (**) podle proměnné y dostáváme:

$$4z^3\frac{\partial z}{\partial y} - x^3z^2 - 2x^3yz\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} + 3y^2 = 0 \text{ , a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(4z^3 - 2x^3yz - x\right) = x^3z^2 - 3y^2 \qquad (***)$$

a v $(1,1)$: $\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\cdot 1 = -2}$ (cbd.)

Tedy: $\underline{z(1{,}01;\, 0{,}96)} \cong 1 + 4\cdot 0{,}01 + 2(-0{,}04) = \underline{1{,}12}$

d) $\underline{?\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)}$: budeme derivovat rovnici pro $\frac{\partial z}{\partial y}$ (***) podle x:

a dostaneme: $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) \text{ díky spojitosti derivace}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\left(4z^3 - 2x^3yz - x\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(12z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 6x^2yz - 2x^3y\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) =$$

$$= 3x^2z^2 + x^3 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 0$$

tj. v $(1,1)$: $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)\cdot 1 - 2\cdot\left(12\cdot 4 - 6 - 8 - 1\right) = 3 + 2\cdot 4$

a odtud $\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = 77}$

(3) Je dána rovnice

$$e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 = 0 \qquad (*)$$

a) Je rovnicí (*) v okolí bodu (1,1,2) definována implicitně funkce $z = z(x,y)$? Ověříme předpoklady „věty o implicitní funkci":

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad F(x,y,z) = e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 \in C^{\infty}(R^3)\\
&2)\quad F(1,1,2) = e^{0} - 2 + 2\cdot 2 - 2 - 1 = 0\\
&3)\quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2) = e^{z-2x} - x + 2y\Big|_{(1,1,2)} = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (dle věty o implicitní funkci) rovnicí (*) je v okolí bodu (1,1,2) definována implicitně funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1) = 2$, tedy otázka je zodpovězena.

b) ? $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$:

funkce $z(x,y)$ splňuje v okolí bodu (1,1) rovnici:

$$e^{z(x,y)-2x} - x\,z(x,y) + 2y\,z(x,y) - 2y - xy^2 = 0 \quad (**)$$

a derivací (**) dle x dostaneme (opět píšu místo $z(x,y)$ jen z)

$$e^{z-2x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 2\right) - z - x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial x} - y^2 = 0, \text{ tj.}$$

$$(***) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}\left(e^{z-2x} - x + 2y\right) = z + y^2 + 2\cdot e^{z-2x}$$

a v (1,1): $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)\cdot 2 = 2+1+2 \Rightarrow \underline{\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{5}{2}}$

a vypočet $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ lze i užitím vzorce $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)}$,

tedy $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = e^{z-2x}(-2) - z - y^2\right)$ je $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{-5}{2} = \dfrac{5}{2}$;

a podobně $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\dfrac{0}{2} = 0$, neboť

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2z - 2 - 2xy$)

c) $z(x,y) \cong z(1,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1)$, tedy

<u>$z(x,y) \cong 2 + \frac{5}{2}(x-1)$ v okolí bodu $(x_0,y_0) = (1,1)$</u>

d) vypočet $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$ – lépe se určí z rovnice (***) než derivací „vzorce" pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$:

<u>derivujeme (***) podle y :</u>

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x} - x + 2y\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(z(x,y) + y^2 + 2e^{z(x,y)-2x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(e^{z(x,y)-2x} - x + 2y\right) + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y} + 2y + 2e^{z(x,y)-2x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

a tedy

v $(1,1)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) \cdot 2 + \frac{5}{2}(0+2) = 0 + 2 + 0$

<u>tedy $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = -\frac{3}{2}$</u>

(4) Van der Waalsova stavová rovnice (p, T, V – stavové veličiny)

je $$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \quad , a>0, b>0$$

tj. $$\big(F(p,V,T)\equiv\big) \quad pV+\frac{a}{V}-bp-\frac{ab}{V^2}-RT=0$$

a nechť $$F(p_0,V_0,T_0)=0$$

Máme přibližně vyjádřit změnu objemu ΔV při změně tlaku p_0 o Δp a teploty T_0 o ΔT:

Z věty o implicitní funkci dostáváme, že funkce $V=V(p,T)$ je diferencovatelná v bodě (p_0,T_0) (funkce $F(p,V,T)$ má spojité derivace, předpokládáme též, že

$$\frac{\partial F}{\partial V}(p_0,V_0,T_0)=p_0-\frac{a}{V_0^2}+\frac{2ab}{V_0^3}\neq 0\ )$$

Pak platí: $\big(\Delta V = V(p,T)-V(p_0,T_0) = V(p,T)-V_0\big)$

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial p}(p_0,T_0)\,\Delta p + \frac{\partial V}{\partial T}(p_0,T_0)\,\Delta T$$

---

a $$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{V-b}{p-\frac{a}{V^2}+\frac{2ab}{V^3}} = \frac{(b-V)V^3}{pV^3-aV+2ab}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{-RV^3}{pV^3-aV+2ab} \quad , \text{tedy}$$

$$\Delta V \cong \frac{1}{p_0V_0^3-aV_0+2ab}\Big((b-V_0)V_0^3\Delta p + RV_0^3\Delta T\Big) \quad \text{tj.}$$

$$\Delta V \cong \frac{V_0^3}{p_0V_0^3-aV_0+2ab}\Big((b-V_0)\Delta p + R\Delta T\Big)$$
